Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

Introduction.

Soient

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\dots,\qquad b_1\sin x+b_2\sin 2x+\dots$$

la série des cosinus et la série des sinus d'une même fonction $f(x)$, définie et intégrable[1]) dans $(0,\pi)$. La série

$$(1)\qquad \sum\frac{b_n}{n}$$

est toujours convergente[2]). Par contre, la série

$$(2)\qquad \sum\frac{a_n}{n}$$

ne converge que si

$$(3)\qquad \int\limits_{\to 0}^{\pi}\frac{dx}{x}\int\limits_{0}^{x}f(t)\,dt$$

existe[3]).

M. ZYGMUND a considéré[4]) des fonctions intégrables $f(x)$ qui sont positives et décroissantes dans $(0,\pi)$. La série (1) est alors même absolument convergente; pour que (2) converge absolument, il faut et il suffit que (3) existe ou, ce qui revient au même dans ce cas, que $f(x)\log 1/x$ soit intégrable dans $(0,\pi)$.

---

[1]) Dans tout ce qui suit, l'intégrabilité d'une fonction sera entendue au sens de Lebesgue.

[2]) Cf. par ex.: A. ZYGMUND, *Trigonometrical series* (Warszawa, 1935), p. 28.

[3]) Cf. G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD, Solution of the Cesàro summability problem for power series and Fourier series, *Math. Zeitschrift*, **19** (1924), pp. 67—96 (lemma 19).

[4]) Cf. A. ZYGMUND, Sur les fonctions conjuguées, *Fundamenta Math.*, **13** (1929), pp. 284—303, en particulier pp. 299—301.

Nous verrons que cette différence entre séries des cosinus et séries des sinus disparaît lorsqu'on considère les séries

$$\sum \frac{a_n}{n^\gamma}, \quad \sum \frac{b_n}{n^\gamma}$$

avec un exposant positif $\gamma < 1$. Nous démontrerons du même coup le résultat mentionné de M. ZYGMUND, et cela par une méthode différente de celle suivie par cet auteur (théorèmes I—II). La partie de ces théorèmes concernant des conditions suffisantes pour la convergence absolue des séries en question, s'étend sans peine aussi à certaines fonctions non-monotones (théorème III). Il en résulte comme corollaire une condition pour qu'une fonction périodique continue, se composant, dans tout intervalle fini, d'un nombre fini de parties convexes ou concaves ait sa série de Fourier absolument convergente.

Des questions analogues se posent aussi pour les intégrales de Fourier ou plutôt elles se redoublent. En effet,

$$\int_0^\infty a(v) \cos xv \, dv \quad \text{et} \quad \int_0^\infty b(v) \sin xv \, dv$$

étant les développements, dans $(0, \infty)$, d'une même fonction $f(x)$ décroissante dans $(0, \infty)$ et tendant vers 0 avec $1/x$, on a à rechercher des conditions pour que $\frac{a(v)}{v^\gamma}$ et $\frac{b(v)}{v^\gamma}$ soient intégrables dans le voisinage de $v=0$, et des conditions pour qu'elles le soient dans le voisinage de $v=\infty$.

De telles conditions seront établies par nos théorèmes IV—VI. Les résultats acquis s'étendent aussi à certaines fonctions non-monotones, tout comme dans le cas des séries de Fourier. Il en résulte en particulier une condition suffisante pour la convergence absolue du développement en intégrale de Fourier d'une fonction se composant d'un nombre fini de parties convexes ou concaves (théorème VII). Des résultats voisins du théorème VII ont été publiés par l'auteur déjà dans un Mémoire antérieur[5]) et il en a tiré parti pour évaluer l'ordre de grandeur des constantes de Lebesgue et des constantes d'approximation attachées à des procédés de sommation des séries de Fourier, d'un type très général.

Un lemme.

Nous nous reporterons fréquemment au lemme suivant:

Soient les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ définies dans l'intervalle $0 < x \leqq a$, la première étant croissante et la seconde décroissante. Supposons que

---

[5]) Cf. B. SZ.-NAGY, Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier, *Hungarica Acta Math.*, 1 (1948), no. 3, pp. 14–52.

$\varphi(+0)=0$, *tandis que* $\psi(x)$ *peut aller à l'infini lorsque* $x\to 0$. *Dans ces conditions, si l'une ou l'autre des intégrales*

$$\int_0^\alpha \varphi(x)\,d\psi(x), \qquad \int_0^\alpha \psi(x)\,d\varphi(x) \tag{4}$$

existe, elles existent toutes les deux et on a

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x)\,\psi(x)=0. \tag{5}$$

Observons d'abord que, grâce à la relation

$$\int_\varepsilon^\alpha \varphi(x)\,d\psi(x)+\int_\varepsilon^\alpha \psi(x)\,d\varphi(x)=\varphi(\alpha)\psi(\alpha)-\varphi(\varepsilon)\psi(\varepsilon),$$

il n'y a qu'à montrer que si l'une ou l'autre des intégrales (4) existe, alors (5) a lieu.

Soit $0<x<z$; on a

$$0\leqq\varphi(x)[\psi(x)-\psi(z)]=\varphi(x)\int_x^z d[-\psi(t)]\leqq\int_x^z \varphi(t)d[-\psi(t)]. \tag{6}$$

Lorsque la première des intégrales (4) existe, il résulte de (6) que

$$0\leqq\lim_{x\to 0}\sup\varphi(x)\psi(x)\leqq\int_0^z\varphi(t)d[-\psi(t)].$$

Comme z est arbitraire, cela entraîne (5).

Lorsque c'est la seconde des intégrales (4) dont on suppose l'existence, (5) s'ensuit par les inégalités

$$\varphi(x)\psi(\alpha)\leqq\varphi(x)\psi(x)=\psi(x)\int_0^x d\varphi(t)\leqq\int_0^x\psi(t)d\varphi(t)$$

où on a intercalé $\varphi(x)\psi(x)$ entre deux fonctions tendant vers 0 avec x.

Remarquons que *le rôle de l'intervalle* $0<x\leqq\alpha$ *et de son extrémité* 0 *pourrait être joué, dans ce lemme, par un intervalle quelconque* $\sigma<x\leqq\alpha$ *ou* $\alpha\leqq x<\sigma$ *et par son extrémité* σ; σ *peut même être égal à* ∞ *ou* $-\infty$.

Nous aurons besoin des cas particuliers suivants de ce lemme:

Soient $f(x)$ *monotone dans* $0<x\leqq\alpha$ *et* $g(x)$ *monotone dans* $\beta\leqq x<\infty$, *de plus soit* $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. *Si l'une ou l'autre des intégrales figurant dans la même ligne existe, elles existent toutes les deux et on a la limite indiquée à la fin de la ligne:*

$$\int_0^\alpha x^r df(x), \qquad \int_0^\alpha x^{r-1}f(x)dx, \qquad \lim_{x\to 0} x^r f(x)=0 \qquad (r>0);$$

$$\int_0^\alpha x\log x\, df(x), \qquad \int_0^\alpha f(x)\log x\, dx, \qquad \lim_{x\to 0}(x\log x)f(x)=0;$$

$$\int_{\beta}^{\infty} x^r dg(x), \qquad \int_{\beta}^{\infty} x^{r-1} g(x)\,dx, \qquad \lim_{x\to\infty} x^r g(x) = 0 \qquad (r>0);$$

$$\int_{\beta}^{\infty} x\log x\,dg(x), \qquad \int_{\beta}^{\infty} g(x)\log x\,dx, \qquad \lim_{x\to\infty} (x\log x) g(x) = 0.$$

Séries de Fourier (fonctions monotones).

Théorème I. *Soit $g(x)$ une fonction décroissante et bornée inférieurement dans l'intervalle $0<x<\pi$. Supposons de plus que $xg(x)$ soit intégrable de façon qu'on puisse formellement développer $g(x)$ en une série des sinus $\sum b_n \sin nx$ où*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\,dx.$$

Pour que la série

$$\sum \frac{b_n}{n^\gamma} \quad (0<\gamma\leqq 1) \tag{7}$$

soit absolument convergente, il faut et il suffit que la fonction $x^{\gamma-1}g(x)$ (donc, dans le cas $\gamma=1$, la fonction $g(x)$ elle-même) soit intégrable dans $(0,\pi)$.

Théorème II. *Soit $h(x)$ une fonction décroissante et bornée inférieurement dans l'intervalle $0<x<\pi$. Supposons qu'elle soit intégrable dans $(0,\pi)$ et soit $\frac{a_0}{2}+\sum a_n \cos nx$ son développement en série des cosinus où*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)\cos nx\,dx.$$

Pour que la série

$$\sum \frac{a_n}{n^\gamma} \quad (0<\gamma\leqq 1) \tag{8}$$

soit absolument convergente, il faut et il suffit, dans le cas $\gamma<1$, que la fonction $x^{\gamma-1}h(x)$, et dans le cas $\gamma=1$, que la fonction $h(x)\log x$ soit intégrable dans $(0,\pi)$.

Pour $\gamma=1$, ces résultats sont dus à M. ZYGMUND[6]).

Pour démontrer I, observons d'abord qu'on peut supposer $g(\pi-0)=0$; en cas contraire on n'aurait qu'à remplacer $g(x)$ par $g(x)-g(\pi-0)$, ce qui ne modifie les b_n que par des quantités b_n' de l'ordre de grandeur $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

---

[6]) L. c. [4])

L'hypothèse que $g(x)$ est monotone et que $xg(x)$ est intégrable, entraîne, en vertu du lemme, que $x^2 g(x) \to 0$, donc aussi

$$(1-\cos nx)\, g(x) \to 0 \quad \text{pour } x \to 0.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$b_n = -\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi (1-\cos nx)\, dg(x),$$

donc $b_n \geqq 0$. La série

$$\sum \frac{b_n}{n^\gamma} = -\frac{2}{\pi}\sum \int_0^\pi \frac{1-\cos nx}{n^{1+\gamma}}\, dg(x)$$

converge si et seulement si la somme $C_\gamma(x)$ de la série à termes positifs

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1-\cos nx}{n^{1+\gamma}}$$

est intégrable par rapport à la fonction monotone $g(x)$.

Or $C_\gamma(x)$ est une fonction continue et $C_\gamma(x) \sim x^\gamma$ pour $x \to 0$.[7]) En effet, comme $1-\cos y \leqq 2$ et encore $\leqq y^2/2$, on a d'une part

$$C_\gamma(x) \leqq \frac{x^2}{2}\sum_{n \leqq 1/x} n^{1-\gamma} + 2\sum_{n > 1/x} \frac{1}{n^{1+\gamma}} \leqq \frac{x^2}{2}\int_0^{1+1/x} t^{1-\gamma}dt + 2\int_{1/x-1}^\infty \frac{1}{t^{1+\gamma}}\, dt \sim x^\gamma,$$

et comme $1-\cos y \geqq 2(y/\pi)^2$ pour $|y| \leqq \pi$, on a d'autre part

$$C_\gamma(x) \geqq 2\,(x/\pi)^2 \sum_{n \leqq 1/x} n^{1-\gamma} \geqq 2(x/\pi)^2 \int_1^{1/x} t^{1-\gamma}dt \sim x^\gamma.$$

On a donc la série (7) convergente si et seulement si x^γ est intégrable dans $(0, \pi)$ par rapport à $g(x)$, ce qui veut dire le même, en vertu du lemme, que $x^{\gamma-1}g(x)$ est intégrable par rapport à x. Théorème I est donc démontré.

Pour démontrer le théorème II, observons d'abord que l'intégrabilité de $h(x)$ entraîne, en vertu du lemme, que $xh(x) \to 0$, donc aussi $(\sin nx)\, h(x) \to 0$ pour $x \to 0$. En intégrant par parties, on obtient

$$a_n = -\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx\, dh(x).$$

On a donc

$$\sum \frac{|a_n|}{n^\gamma} \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sum \frac{|\sin nx|}{n^{1+\gamma}}\, d[-h(x)].$$

[7]) $u(x) \sim v(x)$ pour $x \to \alpha$ veut dire qu'il y a deux constantes positives A, B de sorte que $A \leqq u(x)/v(x) \leqq B$ dans un voisinage de α.

toujours que l'intégrale au second membre existe. Or

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^{1+\gamma}}\leqq\sum_{n\leqq 1/x}\frac{nx}{n^{1+\gamma}}+\sum_{n>1/x}\frac{1}{n^{1+\gamma}}\leqq$$

$$\leqq x\left(1+\int_1^{1/x}\frac{dt}{t^\gamma}\right)+\int_{1/x}^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\gamma}}\sim\begin{cases}x^\gamma & (0<\gamma<1),\\ x\log 1/x & (\gamma=1)\end{cases}$$

lorsque $x\to 0$.

Cela prouve que la série (8) est absolument convergente si x^γ (cas $0<\gamma<1$) resp. $x\log x$ (cas $\gamma=1$) est intégrable par rapport à $h(x)$. En vertu du lemme, cela veut dire le même que $x^{\gamma-1}h(x)$ resp. $h(x)\log x$ est intégrable par rapport à x.

Montrons que cette condition est aussi nécessaire, ou même plus:

x^γ ou $x\log x$ sont, selon les cas, intégrables par rapport à $h(x)$, même si l'on suppose seulement que la série (8) est sommable par le procédé de Césàro.

Supposons donc que la somme

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{a_k}{k^\gamma}=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{\sin kx}{k^{1+\gamma}}\,dh(x)$$

converge vers une limite lorsque $n\to\infty$. Comme on a $\sin kx=s_k(x)-s_{k-1}(x)$ où $s_k(x)=\dfrac{1-\cos(2k+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$, une transformation abélienne fournit:

$$S_{\gamma n}(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{\sin kx}{k^{1+\gamma}}=-\left(1-\frac{1}{n}\right)s_0(x)+\sum_{k=1}^{n-1}s_k(x)\,\delta_{\gamma n}^{(k)}=$$

$$=-\left(1-\frac{1}{n}\right)s_0(x)+T_{\gamma n}(x)$$

où

$$\delta_{\gamma n}^{(k)}=\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{1}{k^{1+\gamma}}-\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\frac{1}{(k+1)^{1+\gamma}}=$$

$$=\left(\frac{1}{k^{1+\gamma}}-\frac{1}{(k+1)^{1+\gamma}}\right)-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k^\gamma}-\frac{1}{(k+1)^\gamma}\right)$$

est une quantité positive, tendant en croissant vers

$$\delta_\gamma^{(k)}=\frac{1}{k^{1+\gamma}}-\frac{1}{(k+1)^{1+\gamma}}\quad\text{lorsque } n\to\infty.$$

Par conséquent, la fonction $T_{\gamma n}(x)$ est positive dans l'intervalle $(0,\pi)$ et tend en croissant vers $T_\gamma(x)=\sum_{k=1}^{\infty}s_k(x)\delta_\gamma^{(k)}$ lorsque $n\to\infty$.

Comme l'intégrale de $S_{\gamma n}(x)$ par rapport à $h(x)$ converge par hypothèse faite vers une limite, il en de même de l'intégrale de $T_{\gamma n}(x)$, d'où il résulte que la fonction-limite $T_\gamma(x)$ est aussi intégrable par rapport à $h(x)$. Or on a $s_k(x) \geqq \frac{2}{x}\left(\frac{2k+1}{2\pi}x\right)^2$ pour $k+\frac{1}{2} \leqq \frac{\pi}{x}$, donc $T_\gamma(x) \geqq$

$$\geqq \frac{2}{\pi^2} x \sum_{k+\frac{1}{2} \leqq \frac{\pi}{x}} \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \delta_\gamma^{(k)} \geqq \frac{2}{\pi^2} x \int_1^{\pi/x} \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 d(-t^{-1-\gamma}) \sim \begin{cases} x^\gamma & (\gamma < 1), \\ x \log 1/x & (\gamma = 1) \end{cases}$$

lorsque $x \to 0$, ce qui assure que x^γ resp. $x \log x$ soit aussi intégrable par rapport à $h(x)$, c. q. f. d.

Séries de Fourier (fonctions plus générales).

En tant qu'il s'agit de conditions *suffisantes*, les deux théorèmes ci-dessus s'étendent aisément à certaines fonctions plus générales et cela tout d'abord aux fonctions qui sont la différence de deux fonctions monotones.

Ainsi, il s'ensuit du théorème I que *si $g(x)$ est à variation bornée dans tout sous-intervalle (ε, π) où $\varepsilon > 0$, et que si $\int_0^\pi x^\gamma |dg(x)|$ existe pour un exposant γ $(0 < \gamma \leqq 1)$, $g(x)$ est intégrable dans $(0, \pi)$ et la série $\sum b_n/n^\gamma$, formée avec les coefficients b_n de sa série des sinus, est absolument convergente.*

En effet, en désignant par $g_1(x)$, $g_2(x)$ les variations positive et négative de g dans l'intervalle (x, π), on a $g = g_2 - g_1$[8]) et $|dg| = |dg_2| + |dg_1|$. Il s'ensuit que x^γ est intégrable aussi par rapport à g_1 et g_2. En vertu du lemme, g_1 et g_2 (voire même leurs produits par $x^{\gamma-1}$) sont intégrables. Donc g est aussi intégrable. Ses coefficients b_n étant les différences de ceux de g_2 et g_1, il n'y a qu'à appliquer le théorème I aux fonctions monotones g_1 et g_2.

De la même façon, on obtient du théorème II que *si $h(x)$ est à variation bornée dans tout sous-intervalle (ε, π) où $\varepsilon > 0$, et que si l'une ou l'autre des intégrales*

$$\int_0^\pi x \log x |dh(x)|, \quad \int_0^\pi x^\gamma |dh(x)| \quad (0 < \gamma < 1)$$

existe, $h(x)$ est intégrable dans $(0, \pi)$ et on a selon les cas la série $\sum a_n/n$, ou la série $\sum a_n/n^\gamma$, formées avec les coefficients a_n de la série des cosinus de $h(x)$, absolument convergentes.

---

[8]) Du moins si $g(\pi) = 0$, ce qu'on peut supposer sans restreindre la généralité.

Ces propositions peuvent être généralisées de la manière suivante:

Théorème III. *Soit* $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *de période* 2π, *à variation bornée dans le voisinage de chaque point sauf peut-être d'un nombre fini de points "singuliers"* α (*incongruents* mod 2π). *En un tel point* α, $f(x)$ *ne doit même pas être définie, mais on suppose que les intégrales*

(9) $$\int_0 u\,|dg_\alpha(u)|, \quad \int_0 u \log u \,|dh_\alpha(u)|$$ [9]

existent où

(10) $$g_\alpha(u) = \tfrac{1}{2}[f(\alpha+u) - f(\alpha-u)], \quad h_\alpha(u) = \tfrac{1}{2}[f(\alpha+u) + f(\alpha-u)].$$

Dans ces conditions, $f(x)$ *est intégrable, et la série*

(11) $$\sum(|a_n| + |b_n|)/n,$$

formée avec ses coefficients de Fourier a_n, b_n, *est convergente.*

Lorsqu'on suppose de plus que les intégrales

$$\int_0 u^\gamma |dg_\alpha(u)|, \quad \int_0 u^\gamma |dh_\alpha(u)|$$

existent pour un exposant γ, $0 < \gamma < 1$, *on a même la série*

(12) $$\sum(|a_n| + |b_n|)/n^\gamma$$

convergente.

Laissant à part le cas évident où il n'y a aucun point singulier, décomposons un intervalle de longueur 2π dont les extrémités ne sont pas des points singuliers, en des intervalles $i_1, \dots, i_p$, chacun contenant un seul point singulier en son intérieur. Désignons par $f_k(x)$ la fonction de période 2π qui est égale à $f(x)$ dans l'intervalle i_k et s'annule dans les autres: on a alors

(13) $$f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x).$$

En désignant par α_k le point singulier dans i_k, les fonctions

(14) $$G_k(u) = \tfrac{1}{2}[f_k(\alpha_k+u) - f_k(\alpha_k-u)], \quad H_k(u) = \tfrac{1}{2}[f_k(\alpha_k+u) + f_k(\alpha_k-u)]$$

ont le seul point singulier $u=0$ et coïncident dans un voisinage de ce point avec les fonctions $g_{\alpha_k}(u)$, $h_{\alpha_k}(u)$ (cf. (10)). Comme on a supposé que les intégrales (9) existent, il résulte de ce qui précède que les fonctions (14) sont intégrables, et que si

$$G_k(u) \sim \sum B_{kn} \sin nu, \quad H_k(u) \sim \tfrac{1}{2} A_{k0} + \sum A_{kn} \cos nu \qquad (0 < u < \pi),$$

on a les séries $\sum \frac{B_{kn}}{n}$ et $\sum \frac{A_{kn}}{n}$ absolument convergentes.

---

[9]) Pour la limite supérieure de ces intégrales, on peut choisir une quantité arbitraire $k > 0$ telle que l'intervalle $(\alpha - k, \alpha + k)$ ne contienne aucun point singulier pour $f(x)$ sauf α. On fera une telle convention aussi pour ce qui suit.

La fonction $G_k(x-\alpha_k)+H_k(x-\alpha_k)=f_k(x)$ est donc aussi intégrable, et si a_{kn}, b_{kn} désignent ses coefficients de Fourier, la série $\sum(|a_{kn}|+|b_{kn}|)/n$ est aussi convergente.

L'intégrabilité de $f(x)$ et la convergence de (11) s'ensuit, grâce à (13), par addition.

La proposition concernant la série (12) se démontre de la même façon.

Voici un corollaire de ce théorème:

Soit $F(x)$ une fonction continue, de période 2π, la courbe $y=F(x)$ se composant d'arcs convexes et concaves, en nombre fini sur un intervalle de période. En un point d'abscisse $x=\alpha$, séparant deux arcs voisins, nous permettons les demi-tangentes d'être verticales, c'est-à-dire que $F'(x)$ croisse indéfiniment lorsque x tend vers α de gauche ou de droite; nous exigeons seulement que l'intégrale

$$(15) \qquad \int_0 u \log u \, |d[F'(\alpha+u)+F'(\alpha-u)]| \quad {}^{10})$$

existe. Dans ces conditions, la série de Fourier de $F(x)$ est absolument convergente.[11])

En effet, la fonction $f(x)=F'(x)$ vérifie les hypothèses de la première partie du théorème III. L'existence de la seconde intégrale (9) est supposée explicitement. Quant à la première, on a

$$\int_0 u\,|d[F'(\alpha+u)-F'(\alpha-u)]| \leq \int_0 u\,|dF'(\alpha+u)| + \int_0 u\,|dF'(\alpha-u)|$$

et les intégrales au second membre existent parce que $F'(\alpha+u)$ et $F'(\alpha-u)$ sont intégrables et monotones pour des petites valeurs de u.

Observons que si $F'(x)$ est "localement symétrique" par rapport à α, cela veut dire que si $F'(\alpha+u)+F'(\alpha-u)=0$ pour u assez petit, l'existence de l'intégrale (15) est manifeste. En un tel point de "symétrie locale", il est donc permise que la demi-tangente de la courbe $y=F(x)$ devienne verticale aussi "rapidement" qu'on veut. En d'autres points α, la condition que l'intégrale (15) existe, présente une limitation pour cette rapidité.

---

[10]) Désignons par $F'(x)$ par exemple la dérivée symétrique

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}[F(x+h)-F(x-h)].$$

[11]) On trouve une liste de conditions plus ou moins compréhensives pour la convergence absolue de la série de Fourier d'une fonction $F(x)$ par ex. dans E. Hille - J. D. Tamarkin, On the summability of Fourier series. III., *Math. Annalen*, **108** (1933), pp. 525—577, en particulier pp. 532—533. Le critère (VI) de ces auteurs est le plus apparenté au nôtre.

Intégrales de Fourier (fonctions monotones).

Passons aux problèmes analogues pour les intégrales trigonométriques. Envisageons d'abord les intégrales des sinus.

Théorème IV. *Soit $g(x)$ $(0 < x < \infty)$ une fonction décroissante et tendant vers 0 avec $1/x$. Supposons que $x\,g(x)$ soit intégrable dans tout intervalle fini $(0, \alpha)$. Alors*

$$b(v) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\to\infty} g(x) \sin xv\, dx$$

existe. Pour que l'une ou l'autre des intégrales

$$(i_\gamma^0) \quad \int_0^1 \frac{|b(v)|}{v^\gamma} dv, \qquad (i_\gamma^\infty) \quad \int_1^\infty \frac{|b(v)|}{v^\gamma} dv \qquad (0 < \gamma \leqq 1)$$

existe, il faut et il suffit que $x^{\gamma-1}g(x)$ soit intégrable, selon les cas, dans $(1, \infty)$, ou dans $(0, 1)$.

Grâce à l'hypothèse faite que $xg(x)$ est intégrable,

$$b_\alpha(v) = \frac{2}{\pi}\int_0^\alpha g(x) \sin xv\, dx$$

a un sens pour tout α fini. En vertu du lemme, l'intégrale

$$(16) \qquad \int_0^\alpha x^2 dg(x)$$

existe et

$$(17) \qquad x^2 g(x) \to 0 \quad \text{pour} \quad x \to 0.$$

Grâce à (17), on obtient en intégrant par parties:

$$b_\alpha(v) = \frac{2}{\pi v} g(\alpha)(1 - \cos \alpha v) - \frac{2}{\pi v}\int_0^\alpha (1 - \cos xv)\, dg(x).$$

Faisant aller α vers l'infini, le premier terme du second membre tend vers 0 et le second terme converge aussi parce que

$$0 \leqq \int_\mu^\nu (1 - \cos xv)\, d[-g(x)] \leqq 2\int_\mu^\nu d[-g(x)] = 2[g(\mu) - g(\nu)] \to 0$$

lorsque $\mu < \nu$ et $\mu \to \infty$.

Donc $b(v) = \lim\limits_{\alpha\to\infty} b_\alpha(v)$ existe et on a

$$b(v) = -\frac{2}{\pi v}\int_0^\infty (1 - \cos xv)\, dg(x) \geqq 0.$$

Il en résulte que (i_γ^0) ou (i_γ^∞) existe si, et seulement si

$$I_\gamma^0(x)=\int_0^1 \frac{1-\cos xv}{v^{1+\gamma}}\,dv \quad \text{ou} \quad I_\gamma^\infty(x)=\int_1^\infty \frac{1-\cos xv}{v^{1+\gamma}}\,dv,$$

selon les cas, est intégrable dans $(0,\infty)$ par rapport à $g(x)$. Or on a

$$I_\gamma^0(x)=x^\gamma\int_0^x \frac{1-\cos w}{w^{1+\gamma}}\,dw\sim\begin{cases} x^2 & \text{pour } x\to 0,\\ x^\gamma & \text{pour } x\to\infty,\end{cases}$$

$$I_\gamma^\infty(x)=x^\gamma\int_x^\infty \frac{1-\cos w}{w^{1+\gamma}}\,dw\sim\begin{cases} x^\gamma & \text{pour } x\to 0,\\ 1 & \text{pour } x\to\infty.\end{cases}$$

Comme x^2 est intégrable par rapport à $g(x)$ dans $(0,1)$ [cf. (16)] et comme $\int_1^\infty 1\,dg(x)$ existe aussi [étant égale à $-g(1)$], on voit que (i_γ^0) ou (i_γ^∞) existe si, et seulement si x^γ est intégrable par rapport à $g(x)$ dans $(1,\infty)$, ou dans $(0,1)$, selon les cas. En vertu du lemme, cela est équivalent avec l'intégrabilité de $x^{\gamma-1}g(x)$ dans $(1,\infty)$, ou dans $(0,1)$; c. q. f. d.

Quant aux intégrales des cosinus, il convient d'étudier les cas $\gamma<1$ et $\gamma=1$ séparément.

Théorème V. *Soit $h(x)$ $(0<x<\infty)$ une fonction décroissante et tendant vers 0 avec $1/x$. Supposons que $h(x)$ soit intégrable dans tout intervalle fini $(0,\alpha)$. Alors*

$$a(v)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\to\infty} h(x)\cos vx\,dx$$

existe. Pour que l'une ou l'autre des intégrales

$$(j_\gamma^0)\quad \int_0^1 \frac{|a(v)|}{v^\gamma}\,dv,\qquad (j_\gamma^\infty)\quad \int_1^\infty \frac{|a(v)|}{v^\gamma}\,dv \qquad (0<\gamma<1)$$

existe, il faut et il suffit, que $x^{\gamma-1}h(x)$ soit intégrable selon les cas, dans $(1,\infty)$, ou dans $(0,1)$.

La fonction monotone $h(x)$ étant intégrable dans $(0,\alpha)$, on a, en vertu du lemme, la fonction x (donc aussi la fonction $\sin vx$) intégrable par rapport à $h(x)$ dans $(0,\alpha)$ et $x\,h(x)\to 0$ [donc aussi $\sin vx.\,h(x)\to 0$] lorsque $x\to 0$.

En intégrant par parties, on obtient que

$$a_\alpha(v)=\frac{2}{\pi}\int_0^\alpha h(x)\cos vx\,dx=\frac{2}{\pi v}h(\alpha)\sin\alpha x-\frac{2}{\pi v}\int_0^\alpha \sin vx\;dh(x),$$

donc

$$a(v)=\lim_{\alpha\to\infty} a_\alpha(v)=-\frac{2}{\pi v}\int_0^\infty \sin vx\;dh(x). \tag{18}$$

Pour que (j_γ^0) ou (j_γ^∞) existe, il suffit donc, selon les cas, que

$$J_\gamma^0(x) = \int_0^1 \frac{|\sin xv|}{v^{1+\gamma}}\, dv, \quad \text{ou} \quad J_\gamma^\infty(x) = \int_1^\infty \frac{|\sin xv|}{v^{1+\gamma}}\, dv$$

soit intégrable dans $(0, \infty)$ par rapport à $h(x)$. Or on a

$$J_\gamma^0(x) = x^\gamma \int_0^x \frac{|\sin w|}{w^{1+\gamma}}\, dw \sim \begin{cases} x & \text{pour } x \to 0, \\ x^\gamma & \text{pour } x \to \infty; \end{cases}$$

$$J_\gamma^\infty(x) = x^\gamma \int_x^\infty \frac{|\sin w|}{w^{1+\gamma}}\, dw \sim \begin{cases} x^\gamma & \text{pour } x \to 0, \\ 1 & \text{pour } x \to \infty. \end{cases}$$

Comme x est intégrable par rapport à $h(x)$ dans $(0, 1)$, et la constante est intégrable par rapport à $h(x)$ dans $(1, \infty)$, on voit que $J_\gamma^0(x)$ et $J_\gamma^\infty(x)$ sont intégrables dans $(0, \infty)$ par rapport à $h(x)$, si (et seulement si) x^γ est intégrable par rapport à $h(x)$ respectivement dans $(1, \infty)$ et dans $(0, 1)$. En vertu du lemme, cela est équivalent avec l'intégrabilité de $x^{\gamma+1}h(x)$ par rapport à x, dans l'intervalle respectif.

La suffisance des conditions ainsi démontrée, passons à la démonstration de leur nécessité. Nous verrons même plus, notamment que $x^{\gamma-1}h(x)$ est intégrable dans $(1, \infty)$ ou dans $(0, 1)$ même si l'on suppose seulement que, selon les cas,

$$\int_{\to 0}^1 \frac{a(v)}{v^\gamma}\, dv, \quad \text{ou} \quad \int_1^{\to\infty} \frac{a(v)}{v^\gamma}\, dv$$

existe comme intégrale impropre, voire même sous l'hypothèse encore plus faible que

$$(19) \quad A_\gamma(\mu) = \int_0^1 e_\mu(v) \frac{a(v)}{v^\gamma}\, dv \quad \text{où} \quad e_\mu(v) = \begin{cases} v/\mu & \text{pour } 0 \leqq v \leqq \mu, \\ 1 & \text{pour } v > \mu, \end{cases}$$

ou

$$(20) \qquad B_\gamma(\nu) = \int_1^\nu \left(1 - \frac{v}{\nu}\right) \frac{a(v)}{v^\gamma}\, dv$$

converge lorsque $\mu \to 0$, $\nu \to \infty$. Observons que l'existence des intégrales $A_\gamma(\mu)$, $B_\gamma(\nu)$ est assurée parce que, d'après (18), on a

$$|a(v)| \leqq \frac{2}{\pi} \int_0^1 x\, |dh(x)| + \frac{2}{\pi v} \int_1^\infty |dh(x)| = C_1 + \frac{C_2}{v}.$$

Faisons d'abord l'hypothèse que $A_\gamma(\mu)$ converge lorsque $\mu\to 0$. On a, par (18),

$$(21)\qquad \begin{aligned} A_\gamma(\mu) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{e_\mu(v)}{v^{1+\gamma}}\left(\int_0^\infty \sin xv\, dh(x)\right)dv = \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\int_0^1 \frac{e_\mu(v)}{v^{1+\gamma}}\sin xv\, dv\right\}dh(x); \end{aligned}$$

l'interversion des intégrations étant légitime parce que la fonction sous le signe d'intégrale admet la majorante

$$F_{\gamma\mu}(v,x) = \begin{cases} e_\mu(v)\, x/v^\gamma & (0<x\leqq 1),\\ e_\mu(v)/v^{1+\gamma} & (1<x<\infty), \end{cases}$$

intégrable dans le domaine $0\leqq v\leqq 1$, $0<x<\infty$, par rapport à la mesure $dv.|dh(x)|$.

Une intégration par parties montre que l'intégrale entre { } dans le dernier membre de (21) est égale à

$$C_{\gamma\mu}(x) = \frac{1-\cos x}{x} + \frac{x}{\mu}\int_0^\mu \frac{1-\cos xv}{x}\frac{dv}{v^{1+\gamma}} + (1+\gamma)\int_\mu^1 \frac{1-\cos xv}{x}\frac{dv}{v^{2+\gamma}},$$

qui est évidemment une fonction *positive* de x et tend vers

$$(22)\qquad C_\gamma(x) = \frac{1-\cos x}{x} + (1+\gamma)\int_0^1 \frac{1-\cos xv}{xv^{2+\gamma}}\, dv$$

lorsque $\mu\to 0$. L'intégrale de $C_{\gamma\mu}(x)$ par rapport à $h(x)$ étant égale à $-\frac{\pi}{2}A(\mu)$, converge vers une limite lorsque $\mu\to 0$. Cela entraîne, en vertu du lemme de Fatou, que la fonction-limite $C_\gamma(x)$ est aussi intégrable par rapport à $h(x)$. Comme on a

$$C_\gamma(x) = \frac{1-\cos x}{x} + (1+\gamma)x^\gamma\int_0^x \frac{1-\cos w}{w^{2+\gamma}}\, dw \sim x^\gamma \quad \text{pour } x\to\infty,$$

la fonction x^γ est aussi intégrable dans $(1,\infty)$ par rapport à $h(x)$, ou, ce qui revient au même, $x^{\gamma-1}h(x)$ est intégrable dans cet intervalle par rapport à x, c. q. f. d.

Envisageons maintenant les conséquences de l'hypothèse que $B(\nu)$, définie par (20), converge vers une limite lorsque $\nu\to\infty$. Par (18),

$$(23)\qquad \begin{aligned} B_\gamma(\nu) &= -\frac{2}{\pi}\int_1^\nu \left(1-\frac{v}{\nu}\right)\left(\int_0^\infty \frac{\sin xv}{v^{1+\gamma}}\, dh(x)\right)dv = \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\int_1^\nu \left(1-\frac{v}{\nu}\right)\frac{\sin xv}{v^{1+\gamma}}\, dv\right\}dh(x); \end{aligned}$$

l'interversion des intégrations étant légitime parce que la fonction sous le signe d'intégrale admet la majorante

$$G_{\gamma\nu}(v, x) = \begin{cases} x/v^{\gamma} & (0 < x \leqq 1), \\ 1/v^{1+\gamma} & (1 < x < \infty), \end{cases}$$

intégrable dans le domaine $1 \leqq v \leqq \nu$, $0 < x < \infty$, par rapport à la mesure $dv.|dh(x)|$.

En intégrant par parties, on voit que l'intégrale entre { } dans le dernier membre de (23) est égale à

$$(24)\quad D_{\gamma\nu}(x) = -\frac{1-\cos x}{x}\left(1-\frac{1}{\nu}\right) + \int_1^{\nu} \frac{1-\cos xv}{x} \frac{1+\gamma}{v^{2+\gamma}}\left(1-\frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{v}{\nu}\right) dv.$$

L'intégrale de $D_{\gamma\nu}(x)$ par rapport à $h(x)$ étant égale à $-\frac{\pi}{2}B(\nu)$, converge vers une limite lorsque $\nu \to \infty$, donc il en est de même de l'intégrale de

$$(25)\quad E_{\gamma\nu}(x) = D_{\gamma\nu}(x) + \frac{1-\cos x}{x}\left(1-\frac{1}{\nu}\right).$$

Or $E_{\gamma\nu}(x)$ tend évidemment en croissant vers

$$E_{\gamma}(x) = (1+\gamma)\int_1^{\infty} \frac{1-\cos vx}{xv^{2+\gamma}} dv = (1+\gamma)x^{\gamma}\int_x^{\infty} \frac{1-\cos w}{w^{2+\gamma}} dw$$

lorsque $\nu \to \infty$. Par conséquent, $E_{\gamma}(x)$ est aussi intégrable dans $(0, \infty)$ par rapport à $h(x)$. Comme $E_{\gamma}(x) \sim x^{\gamma}$ pour $x \to 0$, la fonction x^{γ} est aussi intégrable dans (0, 1) par rapport à $h(x)$, où, ce qui revient au même grâce au lemme, $x^{\gamma-1}h(x)$ est intégrable dans (0, 1) par rapport à x.

Cela achève la démonstration du théorème.

L'hypothèse que la fonction envisagée soit monotone dans tout l'intervalle $(0, \infty)$, *aurait pu être remplacée, dans les théorèmes* IV *et* V, *par l'hypothèse plus générale que la fonction soit monotone du moins dans les voisinages de* 0 *et* ∞ *et qu'elle soit à variation bornée dans la partie complémentaire de* $(0, \infty)$.

Dans la proposition suivante, nous sommes même contraints à envisager ce cas plus général, parce que l'intégrale d'une fonction monotone positive ne pourrait s'annuler, condition qui va jouer cependant un rôle essentiel dans ce qui suit.

Théorème VI. *Soit* $h(x)$ $(0 < x < \infty)$ *monotone pour* x *assez petit et pour* x *assez grand, par ex. pour* $0 < x \leqq \alpha$ *et* $\beta \leqq x < \infty$ [12]) *où* $\alpha < \beta$, *à variation bornée dans* $\alpha \leqq x \leqq \beta$, *et soit* $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. *De plus,* $h(x)$ *soit intégrable dans* $(0, \infty)$.[13]) *Soit*

---

[12]) Dans ces intervalles, le sens de la monotonie peut être égal ou opposé.

[13]) En ce qui concerne l'intégrale $(\int_1^{\infty})$, il suffirait de supposer que $h(x)$ est intégrable dans $(0, \alpha)$.

$$a(v)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty h(x)\cos vx\,dx$$

et envisageons les intégrales

$$(j_1^0)\quad \int_0^1 \frac{|a(v)|}{v}\,dv \quad \textit{et} \quad (j_1^\infty)\quad \int_1^\infty \frac{|a(v)|}{v}\,dv.$$

Pour que (j_1^∞) *existe, il faut et il suffit que* $h(x)\log x$ *soit intégrable dans* $(0, 1)$. *Pour que* (j_1^0) *existe, il faut et il suffit que* $h(x)\log x$ *soit intégrable dans* $(1, \infty)$ *et qu'on ait*

$$\int_0^\infty h(x)\,dx=0. \tag{26}$$

Envisageons d'abord (j_1^∞). On a par (18)

$$\int_1^\infty \frac{|a(v)|}{v}\,dv \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\infty J_1^\infty(x)\,|dh(x)|$$

où

$$J_1^\infty(x)=\int_1^\infty \frac{|\sin xv|}{v^2}\,dv = x\int_x^\infty \frac{|\sin w|}{w^2}\,dw \sim \begin{cases} x\log 1/x & \text{pour } x\to 0,\\ 1 & \text{pour } x\to\infty.\end{cases}$$

Il en résulte, vu aussi le lemme, que si $h(x)\log x$ est intégrable dans $(0, 1)$, (j_1^∞) existe.

Inversement, lorsque (j_1^∞), ou du moins $\lim B_1(\nu)$ existe [cf. (20)],

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_0^\infty E_{1\nu}(x)\,dh(x) \quad \text{existe aussi où} \quad E_{1\nu}(x)=2\int_1^\nu \frac{1-\cos xv}{xv^3}\left(1-\frac{v}{2\nu}\right)dv$$

[cf. (24) et (25)]. Lorsque $\nu\to\infty$, $E_{1\nu}(x)$ tend *en croissant* vers

$$E_1(x)=2\int_1^\infty \frac{1-\cos xv}{xv^3}\,dv = 2x\int_x^\infty \frac{1-\cos w}{w^3}\,dw.$$

Cette fonction étant $\leqq 2/x$, est intégrable dans $\alpha\leqq x<\infty$ par rapport à la mesure $|dh(x)|$, donc on a nécessairement

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\alpha^\infty E_{1\nu}(x)\,dh(x)=\int_\alpha^\infty E_1(x)\,dh(x).$$

Par conséquent, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\int_0^\alpha E_{1\nu}(x)\,dh(x)$ existe aussi, et comme $h(x)$ est monotone dans $(0, \alpha)$, cela entraîne que la fonction-limite $E_1(x)$ est intégrable aussi dans $(0, \alpha)$. Or $E_1(x)\sim x\log 1/x$ pour $x\to 0$, donc $x\log x$ est intégrable dans $(0, \alpha)$ par rapport à $h(x)$ et, par le lemme, $h(x)\log x$ est intégrable dans $(0, \alpha)$ par rapport à x.

Passons au problème de (j_1^0). Faisons l'hypothèse (26), ce qui revient, en vertu du lemme, à supposer que $\int_0^\infty x\,dh(x)=0$. On peut alors écrire, au lieu de (18),

$$a(v)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(x-\frac{\sin xv}{v}\right)dh(x), \tag{27}$$

d'où il vient que

$$\int_0^1\frac{|a(v)|}{v}\,dv\leqq\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\int_0^1\frac{xv-\sin xv}{v^2}\,dv\right\}dh(x). \tag{28}$$

Comme on a

$$K(x)=\int_0^1\frac{xv-\sin xv}{v^2}\,dv=x\int_0^x\frac{w-\sin w}{w^2}\,dw\sim\begin{cases}x^3 & (x\to 0),\\ x\log x & (x\to\infty),\end{cases} \tag{29}$$

le second membre de (28) existe dès qu'on suppose encore que $x\log x$ est intégrable dans (β,∞) par rapport à $h(x)$, ou, en vertu du lemme, que $h(x)\log x$ est intégrable dans (β,∞) par rapport à x.

Ces conditions sont aussi nécessaires; *elles s'ensuivent déjà de l'hypothèse que* $\lim A_1(\mu)$ *existe* [cf. (19)].

Tout d'abord, comme nous avons supposé $h(x)$ intégrable dans $(0,\infty)$, la fonction $a(v)$ est continue même au point $v=0$. On a nécessairement $a(0)=0$, puisque en cas contraire, $A_1(\mu)$ ne pourrait pas converger lorsque $\mu\to 0$. Donc on a (26) et alors on peut se servir de la formule (27). Cela donne

$$A_1(\mu)=\frac{2}{\pi}\int_\mu^1\left(\int_0^\infty\frac{xv-\sin xv}{v^2}\,dh(x)\right)dv=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\int_\mu^1\frac{xv-\sin xv}{v^2}\,dv\right\}dh(x); \tag{30}$$

l'interversion des intégrations étant légitime puisque la fonction sous le signe d'intégrale admet la majorante x/v, intégrable dans le domaine $\mu\leqq v\leqq 1$, $0<x<\infty$, par rapport à la mesure $dv\,|dh(x)|$.

L'intégrale entre { } dans le dernier membre de (30) est une fonction non-négative $K_\mu(x)$, qui tend, lorsque $\mu\to+0$, vers la fonction $K(x)$ définie par (29) et cela en croissant. Comme $K(x)$ est évidemment intégrable dans $(0,\beta)$ par rapport à la mesure $|dh(x)|$, on a nécessairement

$$\lim_{\mu\to 0}\int_0^\beta K_\mu(x)\,dh(x)=\int_0^\beta K(x)\,dh(x).$$

Par conséquent, $\lim\limits_{\mu\to 0}\int_\beta^\infty K_\mu(x)\,dh(x)$ existe aussi, et comme $h(x)$ est monotone dans (β,∞), cela entraîne que la fonction-limite $K(x)$ est intégrable dans (β,∞) par rapport à $h(x)$. Or $K(x)\sim x\log x$ pour $x\to\infty$, d'où il résulte, eu égard aussi au lemme, que $h(x)\log x$ est intégrable dans (β,∞) par rapport à x, ce qui achève la démonstration du théorème.

Intégrales de Fourier (fonctions plus générales).

En tant que conditions suffisantes, les théorèmes IV—VI s'étendent à certaines fonctions plus générales, tout comme c'était le cas pour les théorèmes I—II, notamment aux fonctions qui sont la différence de deux fonctions du type envisagé dans le théorème respectif. On arrive ainsi aux résultats suivants:

Supposons que la fonction $f(x)$ $(0<x<\infty)$ *soit à variation bornée dans tout sous-intervalle* (ε,∞), $\varepsilon>0$, *tende vers* 0 *avec* $1/x$, *et que*

$$\int_0^\infty x^\gamma\,|df(x)| \tag{31}$$

existe pour un exposant positif $\gamma\leqq 1$. *Alors* $b(v)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\to\infty} f(x)\sin xv\,dx$ *existe et* $|b(v)/v^\gamma|$ *est intégrable dans* $(0,\infty)$.

Dans le cas où $\gamma<1$, $a(v)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\to\infty} f(x)\cos xv\,dx$ *existe aussi et* $|a(v)/v^\gamma|$ *est intégrable dans* $(0,\infty)$.

Si l'on suppose, au lieu de l'existence de (31), *celle de*

$$\int_0^\infty x\log x\,|df(x)|,$$

et si l'intégrale de $h(x)$ *dans* $(0,\infty)$ *s'annule, on peut toujours affirmer que* $a(v)$ *existe et* $|a(v)/v|$ *est intégrable dans* $(0,\infty)$.

Ces propositions sont crompriscs, à leur tour, dans la suivante plus générale:

Théorème VII. *Soit* $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ *à variation bornée dans le voisinage de chaque point* x *sauf peut-être d'un nombre fini de points "singuliers", où* $f(x)$ *peut même ne pas être définie, et supposons que* $f(x)$ *tende vers* 0 *avec* $1/x$. *En posant*

$$g_\alpha(u)=\tfrac{1}{2}[f(\alpha+u)-f(\alpha-u)],\quad h_\alpha(u)=\tfrac{1}{2}[f(\alpha+u)+f(\alpha-u)],$$

supposons que les intégrales

$$\int_0 u^\gamma\,|dg_\alpha(u)|,\qquad \int_0 u^\gamma\,|dh_\alpha(u)|\ ^{14)}$$

existent avec un exposant positif $\gamma<1$, *et cela même pour les points singuliers* α. *Supposons de plus que les intégrales*

$$\int^\infty u^\gamma\,|dg_0(u)|,\qquad \int^\infty u^\gamma\,|dh_0(u)|\ ^{15)}$$

existent. Dans ces conditions,

---

14) Pour la limite supérieure de ces intégrales, voir note 9).

15) Pour la limite inférieure de ces intégrales, on peut choisir une quantité arbitraire k, plus grande que le module de chaque point singulier pour $f(x)$.

$$a(v) = \frac{1}{\pi} \int_{\to -\infty}^{\to \infty} f(x) \cos vx\, dx, \qquad b(v) = \frac{1}{\pi} \int_{\to -\infty}^{\to \infty} f(x) \sin vx\, dx$$

existent et $[|a(v)| + |b(v)|]/v^\gamma$ *est intégrable dans* $(0, \infty)$.

Si, au lieu des intégrales ci-dessus avec u^γ, *on suppose que les intégrales*

$$\int_0 u\, |dg_\alpha(u)|, \quad \int_0 u \log u\, |dh_\alpha(u)|; \quad \int^\infty u\, |dg_0(u)|, \quad \int^\infty u \log u\, |dh_0(u)|$$

existent, et de plus que l'intégrale de $f(x)$ *dans* $(-\infty, \infty)$ *s'annule, on peut toujours affirmer que* $a(v)$, $b(v)$ *existent, et que la fonction* $[|a(v)| + |b(v)|]/v$ *est intégrable dans* $(0, \infty)$.

Pour le démontrer, décomposons $f(x)$ suivant ses points singuliers α_k $(k = 1, \ldots, p)$. La fonction $f_k(x)$ soit choisie de façon qu'elle coïncide avec $f(x)$ dans un voisinage de α_k, s'annule pour des grandes valeurs de $|x|$, et qu'elle n'ait que le seul point singulier α_k. En écrivant $f(x) = \sum_1^p f_k(x) + f_\infty(x)$, $f_\infty(x)$ n'aura aucun point singulier et coïncidera avec $f(x)$ pour des grandes valeurs de $|x|$. (Si, en particulier, il n'y a aucun point singulier, on posera $f_\infty(x) = f(x)$.) Dans le cas où l'intégrale de $f(x)$ dans $(-\infty, \infty)$ s'annule, on aura encore le soin de définir $f_k(x)$ $(k = 1, \ldots, p)$ de sorte que son intégrale s'annule aussi. Cela étant, on peut appliquer les résultats que nous venons d'énoncer, aux fonctions $f_k(x - \alpha_k)$, $f_\infty(x)$, ou plutôt aux fonctions g, h qui s'en dérivent, et on conclut comme dans la démonstration du théorème III.

Voici encore un corollaire du théorème VII:

Soit $F(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *une fonction continue, tendant vers* 0 *avec* $1/x$ *et se composant d'un nombre fini de parties convexes ou concaves. À l'extrémité* α *d'un intervalle de convexité ou de concavité, on permet que* $F'(x)$ *devienne* $+\infty$ *ou* $-\infty$, *mais on suppose que*

$$\int_0 u \log u\, |d(F'(\alpha + u) + F'(\alpha - u))|$$

existe. On suppose enfin que

$$\int^\infty u \log u\, |d(F'(u) + F'(-u))|$$

existe. $F(x)$ *admet alors une représentation de Fourier absolument convergente, c'est-à-dire qu'on a* $F(x) = \int_0^\infty [A(v) \cos xv + B(v) \sin xv] dv$ *et* $|A(v)|$, $|B(v)|$ *sont intégrables dans* $(0, \infty)$.[16])

(Reçu le 1 février 1949)

---

[16]) On trouve une liste de conditions pour la convergence absolue des intégrales de Fourier dans l'article cité [11]) de M. Hille et Tamarkin. La condition ci-dessus est apparentée à celles de ces auteurs contenue dans leurs théorèmes 7.1, 7.2.